Devoir surveillé n° 6 – niveau CCINP : correction

Exercice 1. (*d'après CCINP 2023*)
On considère l'expérience aléatoire suivante.
On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec une probabilité $p \in]0\,;1[$ et Face avec une probabilité $1-p$. On effectue une répétition de lancers de cette pièce. Si le premier Pile a été obtenu au n-ème lancer, on place n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n dans une urne et on pioche une de ces boules au hasard.
On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire. On note alors :

- X la variable aléatoire représentant le rang du premier Pile obtenu dans la suite de lancers ;
- N la variable aléatoire représentant le numéro de la boule piochée ensuite dans l'urne.

Prenons un exemple de tirage pour fixer les idées (on note P pour Pile et F pour Face). Si les lancers successifs de la pièce donnent $FFFPFF\ldots$, alors X vaut 4. On place alors quatre boules numérotées de 1 à 4 dans l'urne (on a alors une chance sur quatre de piocher chacune d'entre elles au tirage qui suit).
Le but de l'exercice est de décrire certains aspects des lois de X et N.

Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

On considère dans cette partie des séries entières d'une variable réelle.

Q1. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

Cours : la série géométrique a pour $\boxed{\text{rayon de convergence } 1}$ et on a $\boxed{\forall x \in]-1\,;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}}$.

Q2. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série dérivée de la précédente.

Il suffit de dériver les deux termes de l'égalité précédente. D'après le théorème de dérivation terme à terme, le rayon de convergence de la série dérivée $\boxed{\text{reste } 1}$ et on a $\boxed{\forall x \in]-1\,;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}}$.

Q3. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$. On précisera le rayon de convergence de cette série entière.

D'après le cours, on a $\boxed{\forall x \in]-1\,;1[,\ \ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}}$, le rayon de convergence vaut 1.

Partie II - Loi et espérance de X

Q4. Rappeler la loi de X. On précisera l'ensemble des valeurs prises par X (noté $X(\Omega)$) et, pour chaque entier n dans cet ensemble, la valeur de $P(X=n)$.

C'est à nouveau une question de cours. On remarque que X est le rang du premier succès (obtenir Pile, de probabilité p) lors de répétitions identiques et indépendantes d'une même expérience de Bernoulli donc $\boxed{X \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.
En particulier, $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = p(1-p)^{n-1}}$.

Q5. Justifier l'existence de l'espérance de X, notée $E(X)$, et calculer celle-ci.

Il s'agit de redémontrer le résultat du cours.
On doit d'abord étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in X(\Omega)} nP(X=n) = p\sum_{n\geqslant 1} n(1-p)^{n-1}$. Comme $1-p\in\,]0\,;1[$, d'après **Q2**, cette série est convergente[1] donc $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$. De plus, on a

$$E(X) = p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \overset{\mathbf{Q2}}{=} p\frac{1}{\left(1-(1-p)\right)^2} = \frac{p}{p^2} = \boxed{\frac{1}{p}}.$$

Partie III - Loi de N

Q6. Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? On le notera $N(\Omega)$.

Comme N désigne le numéro de la boule obtenue et que les boules sont numérotées par des entiers supérieurs ou égaux à 1, on a $\boxed{N(\Omega)=\mathbb{N}^*}$.

Q7. Donner, pour $n\in X(\Omega)$ et $k\in N(\Omega)$, la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[X=n]}(N=k)$. On distinguera les cas $1\leqslant k\leqslant n$ et $k>n$.

Lorsque l'événement $[X=n]$ est réalisé, l'urne contient n boules numérotées de 1 à n.
En particulier, si $k>n$, il n'y a pas de boule de numéro k, alors que si $1\leqslant k\leqslant n$, les tirages sont équiprobables parmi les n boules. Ainsi $\boxed{P_{[X=n]}(N=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k>n \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } 1\leqslant k\leqslant n \end{cases}}$.

Q8. Montrer que, pour $k\in\mathbb{N}^*$:

$$P(N=k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1}.$$

On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$.
D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$\begin{aligned} P(N=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([N=k]\cap[X=n]\big) \\ &\overset{\textit{Probabilités composées}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P_{[X=n]}(N=k) \\ &\overset{\mathbf{Q7}}{=} 0+\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}P(X=n) \\ &\overset{\mathbf{Q4}}{=} \boxed{\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Q9. Calculer la valeur de $P(N=1)$.

D'après la question précédente pour $k=1$, on a

$$P(N=1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^n \overset{\mathbf{Q3}}{=} \frac{p}{1-p}\left(-\ln[1-(1-p)]\right) = \boxed{\frac{-p\ln p}{1-p}}.$$

1. On aurait aussi pu le démontrer directement, par exemple grâce à la règle de d'Alembert.

Partie IV - Étude de l'indépendance de X et N

Q10. Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies sur un espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans les ensembles (finis) E_1 et E_2.

D'après le cours, deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 à valeurs respectives dans E_1 et E_2 sont indépendantes si
$$\forall (a,b) \in E_1 \times E_2,\ P\big([Y_1 = a] \cap [Y_2 = b]\big) = P(Y_1 = a) \times P(Y_2 = b).$$

On admettra que cette définition s'étend au contexte de notre problème (où X et N sont des variables aléatoires prenant un nombre infini de valeurs).

Q11. Montrer que $P(N = 2) > 0$.

D'après **Q8**, $P(N = 2) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} > 0$ comme somme de termes strictement positifs.

Q12. Que vaut $P\big([X = 1] \cap [N = 2]\big)$?
Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

- Les événements $[X = 1]$ et $[N = 2]$ sont incompatibles puisque si $[X = 1]$ est réalisé, il n'y a qu'une boule, numérotée 1, dans l'urne donc on ne peut pas obtenir un 2. Ainsi $\boxed{P\big([X = 1] \cap [N = 2]\big) = 0}$.
- D'autre part, d'après la question précédente $P(N = 2) > 0$ et d'après **Q4**, $P(X = 1) = p > 0$ d'où $P(X = 1)P(N = 2) \neq 0 = P\big([X = 1] \cap [N = 2]\big)$, *i.e.* par **Q10**, $\boxed{X \text{ et } N \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

Partie V - Espérance de N

Q13. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N = k) \leqslant (1-p)^{k-1}$.
On pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant k$:
$$\frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} \leqslant p(1-p)^{n-1}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme donné, on peut remarquer que pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n} p(1-p)^{n-1} \leqslant p(1-p)^{n-1}$. En sommant ces termes (les deux séries sont bien convergentes : d'après **Q8** pour celle de gauche et série géométrique de raison $|1-p| < 1$ pour celle de droite), on obtient
$$P(N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}.$$
Or par sommation géométrique, cette dernière somme vaut
$$p \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^{n-1} = p \times (1-p)^{k-1} \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1},$$
d'où $\boxed{P(N = k) \leqslant (1-p)^{k-1}}$.

Q14. En déduire que N admet une espérance et que :
$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

On doit d'abord étudier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(N=k)$. D'après la question précédente, pour tout $k \geqslant 1$, $kP(N=k) \leqslant k(1-p)^{k-1}$ qui est, d'après **Q2**, le terme général d'une série convergente. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1} kP(N=k)$ est convergente, *i.e.* $\boxed{N \text{ admet une espérance}}$ et on a

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) \overset{\textbf{Q8}}{=} \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} k\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1}}.$$

Q15. On admet que le calcul de cette espérance peut être effectué en intervertissant l'ordre de sommation et que l'on a :

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}p(1-p)^{n-1}.$$

Calculer alors cette espérance et montrer que l'on a :

$$E(N) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

D'après l'égalité admise et par linéarité, on a

$$E(N) = p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k = p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(1-p)^{n-1}.$$

Or, via le changement d'indice $m = n+1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(1-p)^{n-1} = \sum_{m=2}^{+\infty} m(1-p)^{m-2} = \frac{1}{1-p}\sum_{m=2}^{+\infty} m(1-p)^{m-1}.$$

Pour calculer cette dernière somme, on ajoute et soustrait les termes pour $m=0$ et $m=1$:

$$\sum_{m=2}^{+\infty} m(1-p)^{m-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} m(1-p)^{m-1} - 0 - 1 \overset{\textbf{Q2}}{=} \frac{1}{\left(1-(1-p)\right)^2} - 1 = \frac{1}{p^2} - 1.$$

En regroupant ces trois résultats, il vient

$$E(N) = \frac{p}{2}\times\frac{1}{1-p}\times\left(\frac{1}{p^2}-1\right) = \frac{p}{2(1-p)}\times\frac{1-p^2}{p^2} \overset{\text{id. rem.}}{=} \frac{1+p}{2p} = \boxed{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right)}.$$

Q16. Montrer que $E(N) \leqslant E(X)$.
Ce résultat était-il prévisible ?

- D'après la question précédente et **Q5**, on a

$$E(N) - E(X) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right) < 0$$

car $0 < p < 1$ donc $\frac{1}{p} > 1$. Comme la différence est négative, on obtient $\boxed{E(N) \leqslant E(X)}$.
- Ce résultat était prévisible car d'après le fonctionnement de l'expérience, la valeur prise par N est toujours inférieure ou égale à celle prise par X (car si X vaut n, on tire une boule numérotée entre 1 et n) donc $\boxed{\text{en moyenne } N \text{ est plus petit que } X}$.

Exercice 2. (*d'après CCINP 2019*)

Dans cet exercice, on étudie l'intégrale $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.

Partie I - Généralités sur la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$

Q17. Calculer u_0, u_1 et u_2.

$$u_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}$$
$$u_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = \boxed{2}$$
$$u_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

Q18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos t \geqslant 0$ et donc $\cos^n(t) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on obtient donc $\boxed{u_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$.

Q19. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{(\cos t - 1)}_{\leqslant 0}\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

Q20. À l'aide d'une intégration par parties, établir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Indication : on écrira $\cos^{n+1}(t) = \cos(t) \times \cos^n(t)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En suivant l'indication, on pose $\begin{cases} u = \cos^n(t) \\ v' = \cos t \end{cases}$ et donc $\begin{cases} u' = -n\sin(t)\cos^{n-1}(t) \\ v = \sin t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\cos^n(t)\sin(t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \textstyle \sin^2(t)+\cos^2(t)=1 \\
&= 0 + n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \textit{linéarité de l'intégrale} \\
&= n\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= n(u_{n-1} - u_{n+1}).
\end{aligned}$$

Finalement, $u_{n+1} = nu_{n-1} - nu_{n+1}$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}}$.

Q21. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant la question précédente, vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n \overset{\textbf{Q20}}{=} nu_{n-1}u_n = v_{n-1}$ donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est constante}}$.
De plus, $v_0 = 1 \times u_1 \times u_0 \overset{\textbf{Q17}}{=} 2\pi$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2\pi}$.

Q22. En déduire que $(n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après **Q19**, la suite (u_n) est décroissante, *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
Ainsi, via la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\pi = v_n = (n+1)u_{n+1}u_n \leqslant (n+1)u_n^2 \quad \text{et aussi} \quad 2\pi = v_n = (n+1)u_{n+1}u_n \geqslant (n+1)u_{n+1}^2.$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2}$.

Q23. Donner, à partir de la question précédente, un encadrement de u_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a d'une part $\dfrac{2\pi}{n+1} \leqslant u_n^2$ et d'autre part $u_{n+1}^2 \leqslant \dfrac{2\pi}{n+1}$ donc $u_n^2 \leqslant \dfrac{2\pi}{n}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}.$$

Q24. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} \leqslant 1$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} = 1$, *i.e.* $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}}$.

Partie II - Série entière

Dans cette partie, on étudie la série entière de rayon de convergence R définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \ \text{ pour tout } x \in \left]-R\,;R\right[.$$

On rappelle qu'on a établi dans la partie précédente que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$.

Q25. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}} = \sqrt{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$. Or la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann) donc, par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est divergente}}$.

Q26. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, posons $v_n = |u_n x^n| = u_n |x| > 0$. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}|x|^{n+1}}{u_n|x|^n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}|x| \underset{+\infty}{\overset{\textbf{Q24}}{\sim}} \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}|x| = |x|\sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Ainsi, si $|x| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n x^n$ est convergente donc $R \geqslant 1$.
A contrario, si $|x| > 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n x^n$ est divergente donc $R \leqslant 1$.
Par double inégalité, on obtient $\boxed{R = 1}$.

Q27. Soient q un réel et n un entier naturel non nul. Rappeler, sans preuve, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ pour $q \neq 1$. Que vaut cette somme si $q = 1$?

Si $q \neq 1$, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$ et si $q = 1$, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n}$.

Q28. Établir la formule suivante pour tout nombre entier naturel non nul n et tout nombre réel $x \in]-1\,;1[$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{1 - x\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1\,;1[$. En commençant par la définition de u_k :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t)\,\mathrm{d}t\right)x^k && \textit{linéarité intégrale}\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} (x\cos t)^k\,\mathrm{d}t && \textit{somme géométrique, cf } \textbf{\textit{Q27}}\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(x\cos(t))^n}{1 - x\cos t}\,\mathrm{d}t && \textit{linéarité intégrale}\\
&= \boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Q29. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos(t)}$ pour tout $|x| < 1$.

Comme $\left|\cos^n(t)\right| \leqslant 1$ et $1 - x\cos t \geqslant 0$ (car $|x| < 1$), on a

$$\left| x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant |x|^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos(t)}.$$

Or, comme $|x| < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |x|^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos(t)} = 0$. D'où, via le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1-x\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question précédente, on obtient

$$\boxed{\forall x \in]-1\,;1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos(t)}}.$$

Q30. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x)+(1+x)u^2}\,\mathrm{d}u$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$. *On rappelle qu'avec ces notations, on a* $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ *et* $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

On a $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right) \iff t = 2\arctan(u)$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Ce changement de variable est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-1\,;1[$ dans $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$. Alors

$$\begin{aligned}
S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k &\overset{\textbf{Q29}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\cos(t)} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2-x(1-u^2)} \\
&= \boxed{\int_{-1}^{1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-x+(1+x)u^2}}.
\end{aligned}$$

Q31. En déduire l'expression de $S(x)$ pour $|x| < 1$.

Soit $x \in]-1\,;1[$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-x+(1+x)u^2} \\
&= \frac{2}{1-x}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+\frac{1+x}{1-x}u^2} \qquad \textit{On fait apparaître la forme } \tfrac{1}{1+y^2} \\
&= \frac{2}{1-x}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}u\right)^2} \\
&= \frac{2}{1-x}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}u\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\arctan\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right) - \arctan\left(-\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right)\right) \qquad \arctan \textit{ est impaire} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \times 2\arctan\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right) \\
&= \boxed{\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. (*d'après CCINP 2020*)
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I - Préliminaires

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour k un élément de $\mathbb{N}$, on considère les fonctions

$$f_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array} \quad \text{et} \quad g_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{array}$$

et on pose $C_k = \mathrm{Vect}(f_k)$ et $S_k = \mathrm{Vect}(g_k)$.

Q32. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que C_k et S_k sont des sous-espaces vectoriels de E et donner leurs dimensions.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Les deux ensembles C_k et S_k étant donnés sous forme de Vect d'éléments qui sont clairement dans E, $\boxed{\text{ce sont des sous-espaces vectoriels de } E}$.

De plus, comme f_k n'est pas la fonction nulle, elle constitue une base de C_k donc $\boxed{\dim(C_k) = 1}$. De même, si $k \geqslant 1$, g_k n'est pas la fonction nulle d'où $\boxed{\dim(S_k) = 1}$. En revanche, si $k = 0$, g_0 est la fonction nulle donc $\boxed{\dim(S_0) = 0}$.

Pour f et g deux éléments de E, on définit $\varphi(f, g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Q33. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Soient f, g, $h \in E$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

- *Symétrie* : $\varphi(g, f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(f, g)$.
- *Linéarité à gauche* :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g, h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda f + \mu g)(t)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\lambda f(t)h(t) + \mu g(t)h(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)h(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{\textit{linéarité intégrale}} \\ &= \lambda\varphi(f, h) + \mu\varphi(g, h). \end{aligned}$$

- *Linéarité à droite* : découle de la symétrie et de la linéarité à gauche.
- *Positivité* : $\varphi(f, f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive.
- *Caractère défini* : supposons $\varphi(f, f) = 0$, *i.e.* $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction f^2 est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0\,;2\pi]$ donc $\forall t \in [0\,;2\pi]$, $f(t)^2 = 0$, *i.e.* $f(t) = 0$ sur $[0\,;2\pi]$. Enfin, par 2π-périodicité, on en déduit que $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, *i.e.* f est la fonction nulle.

On a ainsi montré que $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

Dans la suite, on munit l'espace vectoriel E du produit scalaire φ.

Q34. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la norme de f_k et en déduire une base orthonormée de C_k.

- Si $k = 0$, f_0 est la fonction constante égale à 1, d'où

$$\|f_0\|^2 = \varphi(f_0, f_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi = 1.$$

Ainsi $\boxed{\|f_0\| = 1 \text{ et } f_0 \text{ forme une base orthonormée de } C_0}$.

- Si maintenant $k \in \mathbb{N}^*$, on a (calcul très classique à maîtriser)

$$\|f_k\|^2 = \varphi(f_k, f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2kt)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[t + \frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\boxed{\|f_k\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et donc } \frac{1}{1/\sqrt{2}} f_k = \sqrt{2} f_k \text{ forme une base orthonormée de } C_k}$.

Soient f un élément de E et k un entier naturel.

Q35. Donner l'expression de la projection orthogonale de f sur C_k.

Notons p_{C_k} la projection orthogonale sur C_k. D'après la question précédente, on connaît une base orthonormée de C_k donc

- Si $k = 0$, $p_{C_0}(f) = \varphi(f, f_0) f_0 = \boxed{\varphi(f, f_0)}$ (fonction constante).
- Si $k \geqslant 1$, $p_{C_k}(f) = \varphi(f, \sqrt{2} f_k)\sqrt{2} f_k = \boxed{2\varphi(f, f_k) f_k}$, *i.e.* $p_{C_k}(f)$ est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p_{C_k}(f)(x) = 2\varphi(f, f_k)\cos(kx).$$

Q36. Exprimer $\varphi(f, f_k)$ en fonction des coefficients de Fourier de f.

C'est une question de cours.

- Si $k = 0$, $\varphi(f, f_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{a_0(f)}$.
- Si $k \geqslant 1$, $\varphi(f, f_k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \boxed{\dfrac{1}{2} a_k(f)}$.

Q37. Donner le lien entre la projection de f sur C_k et les coefficients de Fourier de f.

D'après les deux questions précédentes, on a $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ p_{C_k}(f) = a_k(f) f_k}$.

Partie II - Série de Fourier

Soit f la fonction définie pour tout élément x de $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |\sin(2x)|$.

Q38. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $\dfrac{\pi}{2}$.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = |\sin(-2x)| = |-\sin(2x)| = |\sin(2x)| = f(x),$$

donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = |\sin(2x + \pi)| = |-\sin(2x)| = |\sin(2x)| = f(x),$$

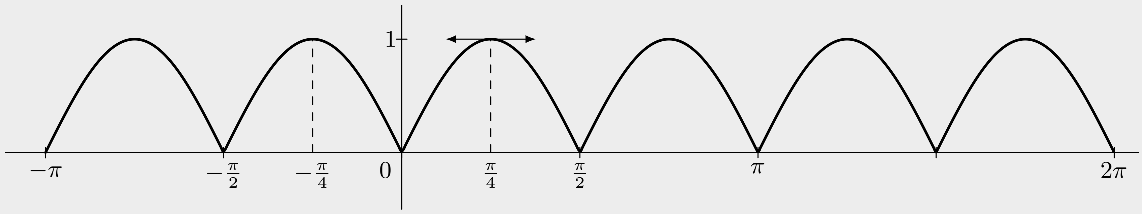
donc $\boxed{f \text{ est } \tfrac{\pi}{2}\text{-périodique}}$.

Q39. Étudier f sur un domaine le plus restreint possible. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-\pi\,; 2\pi]$.

D'après la question précédente, f est $\frac{\pi}{2}$-périodique, il suffit donc de l'étudier sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$. De plus par parité, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.
Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, on a $f(x) = |\sin(2x)| = \sin(2x)$. La fonction f est dérivable[1] sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et on a $f'(x) = 2\cos(2x) \geqslant 0$ pour tout x dans cet intervalle. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\pi/4$
$f'(x)$		$+$	0
f	0	$\nearrow$	1

À l'aide du tableau de variations, on trace l'allure de la courbe représentative de f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$. Ensuite, par parité, on obtient le tracé sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;0\right]$ et enfin sur $\mathbb{R}$ tout entier par $\frac{\pi}{2}$-périodicité.



Q40. Calculer la valeur moyenne de f sur une période.

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) = |\sin(2x)| = \sin(2x)$ donc la valeur moyenne de f sur une période est

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{2}{\pi}}.$$

Q41. Soit $n \in \mathbb{N}$. Linéariser $\sin(2x)\cos(4nx)$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin(2x)\cos(4nx) &= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \times \frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}nx}}{2} \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2+4n)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2-4n)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2-4n)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2+4n)x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2+4n)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2+4n)x}}{2\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2-4n)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2-4n)x}}{2\mathrm{i}}\right) \\
&= \boxed{\frac{\sin((2+4n)x) + \sin((2-4n)x)}{2}}.
\end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu aussi procéder à une démonstration à l'aide des formules de trigonométrie. En effet, on sommant les relations pour $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$, on obtient

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

d'où le résultat escompté en prenant $a = 2x$ et $b = 4nx$.

1. Enlever les valeurs absolues a été nécessaire pour pouvoir conclure cela. Par exemple, f n'est pas dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ car les dérivées à gauche et à droite de 0 ne sont pas égales.

Q42. Montrer que, pour tout élément n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos(4nx)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{4n^2-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos(4nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin\big((2+4n)x\big) + \sin\big((2-4n)x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\big((2+4n)x\big)}{2+4n} + \frac{-\cos\big((2-4n)x\big)}{2-4n}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2+4n} + \frac{2}{2-4n}\right) \qquad \textit{car } \cos\big((2+4n)\tfrac{\pi}{2}\big) = \cos(\pi+2n\pi) = -1 \\
&= \frac{2-4n+2+4n}{(2+4n)(2-4n)} \\
&= \frac{4}{4-16n^2} \\
&= \boxed{\frac{-1}{4n^2-1}}.
\end{aligned}$$

Q43. Donner les coefficients de Fourier de f.

Comme d'après **Q38** la fonction f est $\frac{\pi}{2}$-périodique, $\omega = \dfrac{2\pi}{\pi/2} = 4$.

- La fonction f étant paire (**Q38**), $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } b_n(f) = 0}$.
- Comme par définition a_0 est la valeur moyenne, d'après **Q40**, $\boxed{a_0(f) = \frac{2}{\pi}}$.
- Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(4nx)\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{Q42}}{=} \frac{4}{\pi} \times \frac{-1}{4n^2-1} = \boxed{\frac{-4}{\pi(4n^2-1)}}.$$

Q44. En utilisant le développement de Fourier de f pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4}$.

Comme la fonction f est périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \tilde{f}(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(4nx) = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\cos(4nx)}{\pi(4n^2-1)},$$

où la première égalité entre f et sa régularisée provient de la continuité de f (voir son graphe en **Q39**).
En particulier, pour $x = \frac{\pi}{4}$, comme $\cos\big(4n\frac{\pi}{4}\big) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = f\big(\tfrac{\pi}{4}\big) = \big|\sin\big(2 \times \tfrac{\pi}{4}\big)\big| = 1,$$

ce qui se récrit $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1-\frac{2}{\pi}}{-\frac{4}{\pi}} = \frac{2-\pi}{4}}$.